Limites de fonctions

Activités mentales

Exercice 1 Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f(x) = x^{2016}$
2. $f(x) = x^{2017}$
3. $f(x) = x^2 + 3x - 5$
4. $f(x) = x^3 - 2x$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$
7. $f(x) = x(1-x)$
8. $f(x) = x(x+1)(x+2)$
9. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
10. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
11. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^3-2}$
12. $f(x) = \dfrac{3x^3+2}{2x^2+4}$

Exercice 2 Soit f et g deux fonctions. Justifier par un contre-exemple que les implications suivantes sont fausses.

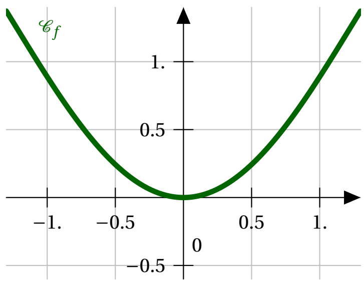
1. $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0.$
2. $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$
3. $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} f(x)g(x) = 0.$

Limites et interprétation graphique

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{9}\right)$.

1. Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ à partir de la représentation graphique ci-contre obtenue à l'aide d'un logiciel.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Expliquer pourquoi la conjecture était erronée.



Exercice 4 Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+x+7}}$ représentée par $\mathscr{C}_g$ dans un repère.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction g.
2. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul dynamique :
   a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$.
   b. Conjecturer une valeur approchée de la limite en $+\infty$ de la fonction g.
3. Déterminer par calcul la valeur exacte de la limite de g en $+\infty$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,3\}$ par : $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^2-9}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   a. Sur une calculatrice, tracé le graphe de f sur $]-3;3[$
   b. Expliquer pourquoi il semble apparaître une contradiction.

Limites et opérations

Exercice 6 Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition $\mathscr{D}$.

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$ $\quad \mathscr{D} =]-\infty\,;\,+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $\quad \mathscr{D} =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$
3. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$ $\quad \mathscr{D} =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$
4. $f(x) = \dfrac{1-2x}{(x-2)^2}$ $\quad \mathscr{D} =]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$

Exercice 7 Soit la fonction f définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{-5x+3}{x-2}$.

1. Exprimer $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-2}$.
2. Donner les limites aux bornes de $\mathscr{D}$.
3. Dresser le tableau de variation f.

Exercice 8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ semble indéterminée. Pourquoi ?

   b. Démontrer que, pour tout réel x : $f(x) = -\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

   c. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9 Étudier la limite de la fonction f en -2.

1. $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{-x^2+x+6}{2x^2+5x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$

Exercice 10 Étudier la limite de la fonction f en 0.

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2-2x}$

Exercice 11 Calculer les limites suivantes, à gauche et à droite s'il y a lieu.

1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$
4. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\mathrm{Ent}(x)}{x}$

Exercice 12 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{3x-2}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x-1}{x-2}}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^3$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$

Théorèmes de comparaison et croissance comparée

Exercice 13 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x, $x-2 \leqslant f(x) \leqslant x+2$. Que peut-on en déduire pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 14 Déterminer les limites de chaque fonction en $+\infty$:

1. $f : x \mapsto x^2 + 2\cos(x)$
2. $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)+x}$
4. $k : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$

Exercice 15 Soit f une fonction telle que, pour tout $x > 1$,

$$\frac{2x^2+3}{3x^2-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x^2+5x}{3x^2-x}$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 16 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$, ou $E(x)$ représente la partie entière de x.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $1 \leqslant 1+\dfrac{1}{x} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$.
2. En déduire un encadrement de $f(x)$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 18 On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(x) = \mathrm{e}^x + x - 1$.

1. Factoriser l'expression de $\ell(x)$ par e^x.
2. Déterminer les limites de ℓ en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 19 Déterminer les limites de chaque fonction en $-\infty$ et en $+\infty$:

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{x}$
3. $h : x \mapsto \mathrm{e}^x + 2$

Exercice 20

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{3x+2} > \mathrm{e}^x$.

   b. En déduire alors la limite de e^{3x+2} en $+\infty$.
2. Calculer de la même façon la limite des expressions suivantes en $+\infty$:

   a. e^{2x-1} **b.** $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{5x-3}}$ **c.** e^{-4x-1}

Pour aller plus loin

Exercice 21 *D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2000)*

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath}\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. **a.** Déterminer la limite de u en $-\infty$.

   b. Montrer que, pour tout x réel : $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ En déduire la limite de u en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que $u(x) + 2x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

   b. Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$. En déduire le signe de $u(x) + 2x$.

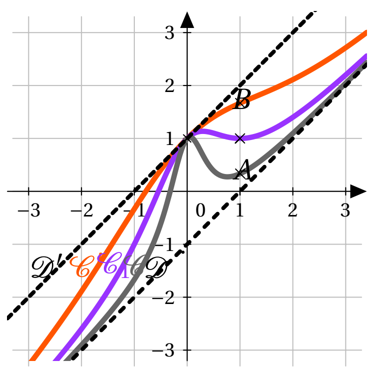
   c. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. **a.** Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par : $u'(x) = \dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

   b. Étudier les variations de la fonction u.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et son asymptote oblique.

Exercice 22 *D'après Bac (Polynésie - 2004)*

Soit la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + \dfrac{1-kx^2}{1+kx^2}$ où k est un réel positif ou nul.

Dans le repère orthonormal de centre O ci-dessous, on a représenté les droites $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ et $\mathscr{D}'$ d'équation $y = x + 1$, la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de f_1 et deux autres courbes représentatives de f_k : $\mathscr{C}$ passant par $A\left(1 ; \dfrac{1}{3}\right)$ et $\mathscr{C}'$ passant par $B\left(1 ; \dfrac{5}{3}\right)$.



1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Justifier que, pour tout réel $k \geqslant 0$, la droite $\mathscr{D}'$ est tangente à la courbe représentative de f_k.
3. Déterminer le réel k associé à $\mathscr{C}$ et celui associé à $\mathscr{C}'$.
4. **a.** Justifier que, pour tout x réel, on a :

   $$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1+kx^2} \quad \text{et} \quad f_k(x) = x + 1 - \frac{2kx^2}{1+kx^2}$$

   b. En déduire pour tout k strictement positif :

   — la position de la courbe $\mathscr{C}_k$ par rapport aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$;

   — les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_k$.
5. On fait tendre k vers $+\infty$.

   Vers quelle fonction f_k va-t-elle se rapprocher?